เส้นทางเดินของแสงที่โค้งในสนามโน้มถ่วง
Bending of Light in Gravitational field

จักรกฤษ แก้วนิคม*
หน่วยวิจัยฟิสิกส์รากฐานและจักรวาลวิทยา สถาบันสำนักเรียนท่าโพธิ์
ภาควิชาฟิสิกส์, มหาวิทยาลัยนเรศวร และ โรงเรียนนิยมศิลป์อนุสรณ์
(Dated: 15th January 2007)

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (general theory of relativity) ซึ่งถูกสร้างและเผยแพร่โดย อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ ในปี ค.ศ. 1915 ซึ่งเป็นทฤษฎีที่อธิบายถึงความโน้มถ่วงของมวลสารใด ๆในเอกภพ สามารถอธิบายการส่ายของวงโคจรดาวพุธ (perihelion of Mercury) และทำนายเส้นทางโคจรได้อย่างแม่นยำกว่าทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบนิวตัน และสามารถอธิบายเส้นทางเดินของแสงที่โค้งขณะที่ผ่านดาวฤกษ์ในขณะที่ ทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบนิวตันไม่สามารถอธิบายได้ ในรายงานนี้แสดงสมการของเส้นทางเดินแสงในสนามโน้มถ่วงซึ่งสามารถศึกษาได้จากหนังสือทฤษฎีสัมพัทธภาพ-ทั่วไปได้ทั่ว ๆไป งานนี้จัดทำขึ้น มีจุดประสงค์เพื่อให้ผู้จัดทำเกิดความเข้าใจในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปมากขึ้นและอาจเป็นแนวทางของผู้สนใจอยากศึกษาในทฤษฎีนี้ต่อไป

บทนำ

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปเป็นทฤษฎีที่อธิบายความโน้มถ่วง (gravity) ได้ดีที่สุดในขณะนี้ โดยทฤษฎีนี้ไม่ได้มองว่าความโน้มถ่วงเป็น " แรง " เหมือนอย่างทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบนิวตัน (Newtonian gravity) แต่มองว่าความโน้มถ่วงคือ การโค้งงอของกาลอวกาศ (curvature of spacetime) อนุภาคใด ๆที่อยู่ในสนามโน้มถ่วง รวมทั้งโฟตอนหรืออนุภาคแสงจะเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางที่สั้นที่สุดในกาลอวกาศที่โค้งงอ เส้นทางนี้เรียกว่า เส้นจีโอเดสิก (geodesic lines) ด้วยแนวคิดของทฤษฎีนี้ เมื่อแสงเดินทางไปตามกาลอวกาศที่โค้งงอ จึงเหมือนกับว่า แสงเดินเป็นเส้นโค้ง แต่ในห้องทดลองเล็ก ๆหรือบริเวณแคบ ๆ เราจะตรวจวัดการเบี่ยงเบนของเส้นทางเดินของแสงแทบไม่ได้เลย เนื่องจากบริเวณเล็ก ๆ กาลอวกาศที่โค้งงอจะดูเหมือนแบนราบ (flat spacetime) หรือที่เราเรียกว่ากาลอวกาศมิงโกว์สกี (Minkowski spacetime) เราอาจจะนึกโลกของเราซึ่งมันกลมเหมือนผลส้ม แต่ถ้าเรามองบริเวณเล็ก ๆจะเหมือนกับว่าโลกแบน สมการที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคไปตามกาลอวกาศที่โค้งงอเรียกว่าสมการจีโอเดสิก (geodesic equation)

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\dot{x}^{\rho}\dot{x}^{\sigma} = 0 \tag{1}$$

เมื่อ $\dot{x}^{\mu} = \mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}\lambda$, λ คือ พารามิเตอร์ของเส้นทาง $x^{\mu}(\lambda)$ และ $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}$ คือ สัญลักษณ์คริสโตฟเฟล (Cristoffel symbols) ณ บริเวณเล็ก ๆ ของกาลอวกาศ ค่าของสัญลักษณ์คริสโตฟเฟลจะเป็นศูนย์ นั่นคือสมการ 1 จะลดรูปกลายเป็นสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคอิสระ (free particles) ในแนวความคิดแบบกลศาสตร์นิวตัน

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปได้บอกไว้ว่า *ที่ใดมีมวลสารกาลอวกาศรอบ ๆจะเกิดการโค้งงอ* ซึ่งอธิบายได้โดยสมการที่เป็นหัวใจสำคัญในทฤษฎีนี้ นั่นคือ สมการสนามของไอน์สไตน์ (Einstein's field equation)

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2}$$

(โดยเราให้อัตราเร็วแสง $c = 1$) เมื่อ $G_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์ไอน์สไตน์ (Einstein tensor), G คือ ค่าคงที่ความโน้มถ่วง (gravitational constant) และ $T_{\mu\nu}$ คือ เทนเซอร์พลังงาน-โมเมนตัม (energy-momentum tensor) สำหรับการ

* chain_ckk@hotmail.com

พิจารณาวิถีของอนุภาคใด ๆภายนอกมวลสาร เราจะใช้ผลเฉลยหนึ่งของสมการสนาม เรียกว่าผลเฉลยชวาร์สชิลด์ (Schwarzschild solution) หรือเมทริกชวาร์สชิลด์ (Schwarzschild metric) ซึ่งเป็นผลเฉลยของกาลอวกาศรอบ ๆ ทรงกลมสมมาตร (spherical symmetry) เปรียบได้กับกาลอวกาศรอบ ๆมวลสารใด ๆ ซึ่งจะพิจารณาในส่วนต่อไป

จีโอเดสิกแบบนัลของกาลอวกาศชวาร์สชิลด์

แสงหรืออนุภาคโฟตอนเป็นอนุภาคที่มี*เวิร์ลด์ไลน์* (worldline) หรือเรียกว่าเส้นทางเดินของอนุภาคใน 4 มิติ อยู่ที่ผิวกรวยแสงแห่งกาลอวกาศ (light cone) พอดี เราเรียกอนุภาคโฟตอนว่า อนุภาคไลท์ไลค์ (lightlike particles) และเรียกเส้นทางเดินของโฟตอนว่านัลจีโอเดสิก (null geodasic) ถ้าเราพิจารณาเส้นจีโอเดสิกแบบนัล เราจะใช้ผลเฉลยแบบชวาร์สชิลด์ในการหาสมการการเคลื่อนที่ แต่เนื่องจากเราจะใช้เวลาที่แท้จริง (proper time) เป็นพารามิเตอร์ของเส้นทางเดินแสงไม่ได้ เนื่องจากแสงไม่มีระยะห่างของกาลอวกาศ (spacetime interval) ดังนั้น เราจึงใช้แอฟไฟน์พารามิเตอร์ใด ๆ, λ เป็นพารามิเตอร์ของเส้นทางเดินของแสง

พิจารณาผลเฉลยชวาร์สชิลด์

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{3}$$

เมื่อ $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$, เป็นเมทริกของทรงกลม (2-sphere) หนึ่งหน่วย ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ 3 เทียบกับพารามิเตอร์ของเส้นทาง λ จะได้

$$\epsilon = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \tag{4}$$

ปริมาณ ϵ มีค่าเป็น {-1, 0, 1} สำหรับไทม์ไลค์, นัล, และสเปซไลค์ตามลำดับ ซึ่งกรณีของจีโอเดสิกแบบนัล เราให้ $\epsilon = 0$ ถ้าเราพิจารณาทางเดินแสงจะพบว่ามันจะเคลื่อนที่ไปบนระนาบใดระนาบหนึ่ง ดังนั้นเราจะพิจารณาในแนวระนาบอิเควเตอร์ (equatorial plane) นั่นคือ $\theta = \pi/2$ และเนื่องจากว่า ผลเฉลยชวาร์สชิลด์เป็นผลเฉลยรอบ ๆทรงกลมสมมาตร ซึ่งจะทำให้ปรากฏคิลลิงเวกเตอร์ (Killing vectors) ที่แสดงถึงปริมาณอนุรักษ์ (conserved quantity) ในการเคลื่อนที่คือ

$$E = -g_{\mu\nu}\xi^\mu \dot{x}^\nu = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\dot{t} \tag{5}$$

เมื่อ $\xi^\mu = (\partial/\partial t)^\mu$ เป็นสนามคิลลิงเวกเตอร์ ซึ่งแสดงถึงการไม่เปลี่ยนแปลงตามกาลเวลา เราอาจแปลความหมายของ E ได้ว่าเป็นพลังงานรวมของอนุภาคโฟตอน และปริมาณอนุรักษ์อีกปริมาณที่แสดงถึงความไม่เปลี่ยนแปลงในการหมุน เขียนแสดงได้คือ

$$L = g_{\mu\nu}\psi^\mu \dot{x}^\nu = r^2\dot{\phi} \tag{6}$$

โดยที่สนามคิลลิงเวกเตอร์ในการหมุนคือ $\psi^\mu = (\partial/\partial\phi)^\mu$ เราอาจแปลความหมายของ L ได้ว่าเป็น โมเมนตัมเชิงมุมของโฟตอน แทนค่าสมการ 5 และสมการลงในสมการ 6 ลงในสมการ 4 และจัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{1}{2}E^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + V(r) \tag{7}$$

เมื่อค่า*ศักย์ยังผล* (effective potential) $V(r)$ ของโฟตอนถูกนิยามเป็น

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^3}(r - 2GM) \tag{8}$$

นั่นคือ ค่าศักย์ยังผลจะมีค่ามากที่สุดที่ $r = 3GM$ จะเห็นได้ว่าค่าศักย์ยังผลมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $r = 2GM$ ซึ่งต่างกับทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบนิวตันตรงที่ศักย์ยังผลจะมีค่าเข้าใกล้อนันต์เมื่อรัศมีของดาวเข้าใกล้ศูนย์

สมการการเคลื่อนที่

เราจะนิยามอิมแพคพารามิเตอร์ (impact parameter)

$$b \equiv \frac{L}{E} \tag{9}$$

ซึ่งเป็นระยะที่เส้นทางเดินแสงเข้าใกล้ดวงดาวมากที่สุดโดยที่ไม่ถูกดูดเข้าไป ดังนั้นจากสมการ 7 เราจะได้ค่าอิมแพคพารามิเตอร์วิกฤติ b_c เมื่อเราใช้ค่าที่มากที่สุดของศักย์ยังผลแทนในสมการ 7

$$b_c = 3^{3/2} GM \tag{10}$$

นั่นหมายความว่าอนุภาคโฟตอนจะถูกดูดเข้าไปในดวงดาวเมื่อเส้นทางเดินแสงที่ปรากฏมีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตินี้ สำหรับแสงที่ผ่านสนามโน้มถ่วงของดวงอาทิตย์ของเรา ค่าวิกฤตินี้จะมีค่า 7.678 กิโลเมตร สิ่งที่เราต้องการจะหาก็คือมุมที่แสงเบี่ยงเบน ดังนั้นเราจัดรูปสมการ 7 ใหม่เพื่อที่จะหาค่ามุมนี้โดยนิยามให้ $u = 1/r$ เราจะได้สมการใหม่คือ

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\left(b^{-2} - u^2 + 2GMu^3\right)^{1/2}} \tag{11}$$

จะเห็นได้ว่ากรณีที่มวล M ในสมการ 14 หายไป เราจะได้ผลเฉลยของสมการคือ

$$r \sin(\phi - \phi_0) = b \tag{12}$$

ซึ่งแสดงถึงเส้นทางเดินแสงที่เป็นเส้นตรงเป็นไปตามทฤษฎีของนิวตัน เราจะสมมติฐานว่า $GMu \ll 1$ ดังนั้นเทอมที่เป็นกำลังสองหรือมากกว่านั้นสามารถที่จะตัดทิ้งไปได้ และเรานิยาม

$$y \equiv u(1 - GMu), \qquad \Longrightarrow \quad u = y(1 + GMy) + \mathcal{O}(M^2u^2) \tag{13}$$

สมการ 14 กลายเป็น

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u} = \frac{(1 + 2GMy)}{\left(b^{-2} - y^2\right)^{1/2}} + \mathcal{O}(M^2u^2) \tag{14}$$

สมการนี้จะถูกอินทิเกรตและได้

$$\phi = \phi_0 + \frac{2GM}{b} + \arcsin(by) - 2GM\left(\frac{1}{b^2} - y^2\right)^{1/2} \tag{15}$$

ในกรณีที่ $y \to 0$ จะทำให้ $\phi \to \phi_0$ นั่นเป็นค่าที่ระยะรัศมี r มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $y = 1/b$ เราจะได้มุมที่เกิดการเบี่ยงเบนคือ $\phi = \phi_0 + 2GM/b + \pi/2$ ซึ่งเป็นมุมที่แสงเดินทางจากจุด ๆหนึ่งไปยังจุดที่เข้าใกล้ดาวมากที่สุด แต่

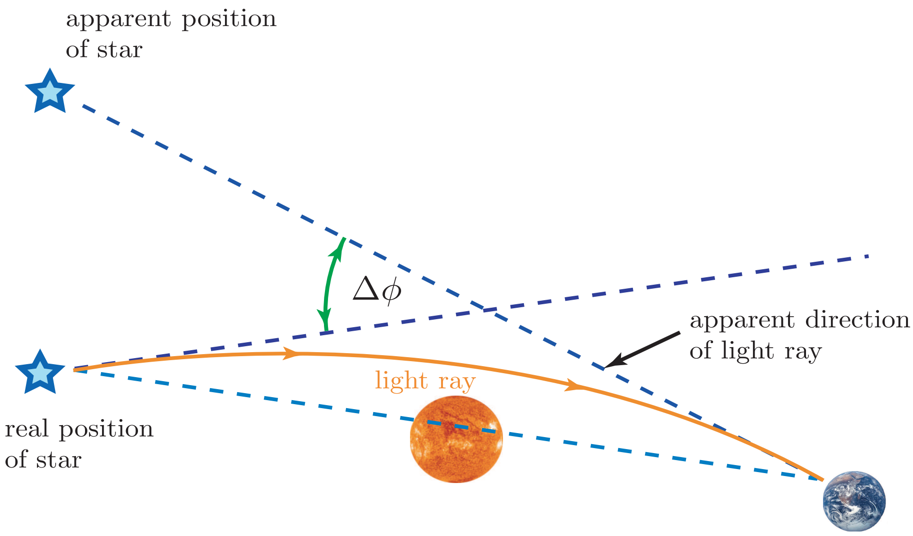

Figure 1: มุมที่เกิดขึ้นขณะที่แสงเดินทางผ่านสนามโน้มถ่วง

ถ้าเราคิดมุมจากจุดที่แสงใกล้ดาวมากที่สุดผ่านมาเข้าตาเรา เราจะได้มุมรวมทั้งหมดคือ $\pi + 4GM/b$ สังเกตได้ว่ามุม π เป็นมุมที่แสงเดินทางไปบนเส้นตรง เพราะฉะนั้นมุมที่เกิดการเบี่ยงเบนของแสงทั้งหมดก็คือ

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 b} \tag{16}$$

เมื่อค่าอัตราเร็วแสง c ได้ใส่ตามมาทีหลัง แสงที่เดินทางเป็นเส้นโค้งในสนามโน้มถ่วงของดวงอาทิตย์ของเราสามารถคำนวณได้โดยใส่ค่าปริมาณต่าง ๆ ค่าอิมแพคพารามิเตอร์เราจะใช้ค่าที่เข้าใกล้มากที่สุดนั่นคือรัศมีของดวงอาทิตย์ $b = R_\odot$ และค่ามุมที่คำนวณออกมาได้คือ

$$(\Delta\phi)_{\odot,\max} = 8.45 \times 10^{-6} \ \text{rad} = 1''.74 \tag{17}$$

ซึ่งเป็นค่าที่น้อยมากแทบจะตรวจวัดไม่ได้เลย ปรากฏการณ์ที่แสงเกิดการเบี่ยงเบนเมื่อผ่านสนามโน้มถ่วงปรากฏให้เห็นในขณะที่เกิดสุริยุปราคาเต็มดวงจะสังเกตดวงดาวที่ปรากฏณ์รอบ ๆดวงอาทิตย์ (ที่ถูกบังโดยดวงจันทร์) แต่เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับภาพถ่ายของดาวดวงเดียวกันพบว่าดาวนั้นเปลี่ยนตำแหน่งไปจากเดิม ซึ่งในความเป็นจริงแล้วตำแหน่งของดวงดาวในขณะนั้นจะต้องถูกดวงอาทิตย์บังไว้สนิทแต่กับปรากฏแก่สายตา เป็นไปตามการทำนายของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป มุมที่เกิดขึ้นนี้จะขึ้นอยู่กับความหนาแน่นมวล ถ้ามวลของดาวดวงใดหรือมวลสารใด ๆมีมากก็จะเกิดการเบี่ยงเบนของแสงอย่างเห็นได้ชัดมากยิ่งขึ้น

บทสรุป

งานที่ทำขึ้นมาครั้งนี้เราได้พิจารณาแค่จุดมวล (point mass) และเส้นทางเดินแสงก็เป็นเพียงเส้นเส้นเดียวเท่านั้น ซึ่งในความเป็นจริงแล้วเส้นแสงไม่ได้มีเพียงเส้นเดียว อย่างไรก็ตามผลที่เกิดขึ้นนี้สามารถนำไปประยุกต์ได้กับการเกิดปรากฏการณ์*เลนส์ความโน้มถ่วง* (gravitational lens) โดยพิจารณาเส้นทางเดินแสงหลาย ๆเส้นผ่านสนามโน้มถ่วงแล้วมาบรรจบกันเป็นจุดโฟกัสคล้ายเป็นเลนส์นูน ซึ่งเป็นปรากฏการณ์สำคัญที่นักดาราศาสตร์สังเกตการณ์สามารถที่จะตรวจสอบเพื่อหาตำแหน่งของหลุมดำ (black holes) โดยสังเกตแสงที่เกิดการเบี่ยงเบน

เมื่อผ่านหลุมดำ เนื่องจากหลุมดำจะไม่เปล่งแสงขาวออกมาจึงสังเกตโดยตรงไม่ได้ นอกจากนี้ยังใช้ยืนยันสมมติฐานการมีอยู่จริงของ*สสารมืด* (dark matter) ซึ่งเป็นสสารที่มองไม่เห็น โปร่งแสง และแทบจะไม่มีอันตรกิริยากับมวลสารอื่น เราจึงไม่สามารถสังเกตสสารมืดได้เลยแต่มีภาพถ่ายทางดาราศาสตร์ที่แสดงถึงเลนส์ความโน้มถ่วงโดยที่ไม่สังเกตเห็นมวลสารใด ๆที่ทำให้เกิดเลนส์โน้มถ่วงนี้ นั่นหมายความว่า มวลสารที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์นี้อาจจะเป็นสสารมืดตามคำทำนายในทางดาราศาสตร์ก็เป็นได้

[1] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press (1990).

[2] S. M. Carroll, *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*, Wesley (2004).

[3] Robert. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).

[4] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press (2004).